Sur la transformation des courbes algébriques.

PAR E. GOURSAT.

---

1. Lorsque les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique C

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

s'expriment par des fonctions rationnelles d'un paramètre t, par des formules telles que

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \tag{2}$$

il peut se présenter deux cas. Si à un point (x, y) de la courbe C ne correspond qu'une valeur du paramètre t, la courbe C correspond point par point à une ligne droite $z = t$. Si à un point (x, y) correspondent plusieurs valeurs du paramètre t, il suffit d'un simple changement dans le paramètre, comme l'a démontré Mr. Luröth (Mathematische Annalen, t. IX, p. 163), pour être ramené au premier cas.

Le théorème de Mr. Luröth peut-être généralisé de différentes façons. Une première généralisation, que la théorie des intégrales abéliennes rend évidente, est celle-ci : *Si les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique C sont des fonctions rationnelles des coordonnées d'un point d'une autre courbe algébrique C', le genre de la courbe C est au plus égal au genre de la courbe C'.* En effet, la courbe C' a au moins autant d'intégrales distinctes de première espèce que la courbe C, mais elle peut en avoir davantage, si la transformation n'est pas birationnelle.

Voici une généralisation différente, d'un caractère plus algébrique. *Si les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique C sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t et d'une variable v liée à t par une équation algébrique entière de degré n en v, de telle façon qu'à un même point (x, y) de C correspondent plusieurs systèmes de valeurs de t et de v, on peut trouver une courbe C', qui correspond point par point à la courbe C, et dont l'équation renferme une des variables à un degré égal ou inférieur à n.*

2. La démonstration de ce théorème repose sur deux lemmes, que nous allons d'abord établir. Supposons que les points de deux courbes C, C' se correspondent de telle façon qu'à un point de C' corresponde un seul point de C et qu'à un point de C correspondent μ points de C' $(\mu > 1)$. Si (x, y) désignent les coordonnées d'un point de C, (x', y') les coordonnées d'un point de C', on a

$$x = \phi(x', y'); \quad y = \psi(x', y'), \tag{3}$$

$\phi(x', y')$ et $\psi(x', y')$ étant des fonctions rationnelles. Pour un point (x, y) de C les trois équations

$$x = \phi(x', y'), \quad y = \psi(x', y'), \quad F_1(x', y') = 0,$$

dont la dernière est l'équation de la courbe C', ont μ systêmes de solutions communes en (x', y'). On dit que la courbe C est une transformée *simplement rationnelle* de la courbe C'. Cela posé, soit $\Phi(x', y')$ une fonction rationnelle de (x', y') devenant infinie du premier ordre en ν points seulement $(\alpha'_1, \beta'_1), \ldots .$ $(\alpha'_\nu, \beta'_\nu)$ de C', auxquels correspondent ν points *distincts* de C, $(\alpha_1, \beta_1), \ldots . (\alpha_\nu, \beta_\nu)$; *il existe une fonction rationnelle* $\Pi(x, y)$ *du point analytique* (x, y) *devenant infinie du premier ordre en quelques-uns des* ν *points* $(\alpha_1, \beta_1), \ldots . (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, *seulement.*

Nous supposerons, ce qui ne restreint pas la généralité, que la courbe C, de degré m, a m points distincts à l'infini et qu'aucune asymptote n'est parallèle à l'axe des y, et de même que la courbe C', de degré m', a m' points distincts à l'infini et qu'aucune asymptote n'est parallèle à l'axe $0y'$; enfin, que les points (α_i, β_i) et (α'_i, β'_i) sont des points simples des deux courbes. Soit ρ le genre de la courbe C, et

$$\lambda_1 Q_1(x, y) + \lambda_2 Q_2(x, y) + \ldots . + \lambda_\rho Q_\rho(x, y) = 0,$$

l'équation générale des courbes adjointes d'ordre $m - 3$. Toute intégrale de première espèce relative à la courbe C se change, par la transformation (3), en une intégrale de première espèce relative à la courbe C'; on a donc ρ relations de la forme

$$\int \frac{Q_i(x, y)\,dx}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \int \frac{R_i(x', y')\,dx'}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y'}},$$

$R_i(x', y')$ désignant un polynôme adjoint d'ordre $m' - 3$ relatif à la courbe C'. Ces ρ relations peuvent aussi s'écrire

$$\frac{Q_1(x, y)}{R_1(x', y')} = \frac{Q_2(x, y)}{R_2(x', y')} = \ldots . = \frac{Q_\rho(x, y)}{R_\rho(x', y')} = H(x', y'), \tag{4}$$

en posant

$$H = \frac{dx'}{dx} \frac{\frac{\partial F}{dy}}{\frac{\partial F_1}{\partial y}}.$$

La courbe C' étant en général de genre $\rho' > \rho$ possède en outre $\rho' - \rho$ polynômes adjoints d'ordre $m - 3$, $R_{\rho+1}(x', y') \ldots . R_{\rho'}(x', y')$, formant avec les premiers un système de ρ' polynômes adjoints linéairement indépendants. Designons par σ le nombre des courbes adjointes distinctes d'ordre $m - 3$ qui passent par les ν points (α_i, β_i) de C, et par σ' le nombre des courbes adjointes distinctes d'ordre $m' - 3$ qui passent par les ν points (α'_i, β'_i) de C'. On obtient ces nombres en considérant les déterminants que l'on peut déduire des deux tableaux (E) et (E') par la suppression d'un certain nombre de lignes et de colonnes

$$(E) \left| \begin{array}{l} Q_1(\alpha_1, \beta_1), \quad Q_2(\alpha_1, \beta_1), \ldots . Q_\rho(\alpha_1, \beta_1) \\ Q_1(\alpha_2, \beta_2), \quad Q_2(\alpha_2, \beta_2), \ldots . Q_\rho(\alpha_2, \beta_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_1(\alpha_\nu, \beta_\nu), \quad Q_2(\alpha_\nu, \beta_\nu), \ldots . Q_\rho(\alpha_\nu, \beta_\nu) \end{array} \right|,$$

$$(E)' \left| \begin{array}{l} R_1(\alpha'_1, \beta'_1), \ldots . R_\rho(\alpha'_1, \beta'_1), \ldots . R_{\rho'}(\alpha'_1, \beta'_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_1(\alpha'_\nu, \beta'_\nu), \ldots . R_\rho(\alpha'_\nu, \beta'_\nu), \ldots . R_{\rho'}(\alpha'_\nu, \beta'_\nu) \end{array} \right|.$$

Les nombres σ et σ' ayant été définis comme tout-à-l'heure, tous les déterminants d'ordre $\rho - \sigma + 1$ contenus dans le tableau (E) sont nuls, et l'un au moins des déterminants d'ordre $\rho - \sigma$ est différent de zéro; de même, tous les déterminants d'ordre $\rho' - \sigma' + 1$ du tableau $(E)'$ sont nuls et l'un au moins des déterminants d'ordre $\rho' - \sigma'$ n'est pas nul. Or, on peut supposer qu'en chacun des points (α'_i, β'_i) le facteur $H(x', y')$ a une valeur finie; en effet, si la fonction rationnelle $\Phi(x', y')$ a ν pôles du premier ordre, il en est de même de la fonction rationnelle $\frac{1}{\Phi(x', y') - A}$, quelle que soit la constante A, et on peut toujours disposer de cette constante de façon que les ν pôles de la nouvelle fonction rationnelle soient distincts des pôles de $H(x', y')$. Cela étant, les formules (4) nous montrent que tout déterminant du tableau (E) est égal à un déterminant du même ordre du tableau $(E)'$ multiplié par un facteur qui conserve une valeur finie. Il suit de là que tous les déterminants d'ordre $\rho' - \sigma' + 1$ du premier tableau sont nuls, et on doit avoir

$$\rho - \sigma \leqq \rho' - \sigma'. \tag{5}$$

La fonction rationnelle $\Phi(x', y')$ devenant infinie du premier ordre aux ν points (α'_i, β'_i) seulement, ou en quelques-uns de ces points, dépend de $\nu - \rho' + \sigma' + 1$ constantes arbitraires, d'après le théorème général de Riemann-Roch (V. Picard, Traité d'Analyse, tome II, p. 431). Ce nombre est au moins égal à 2, car, si la fonction $\phi(x', y')$ répond à la question, il en est de même de $A\phi(x', y') + B$, quelles que soient les constantes A et B. On a donc aussi, d'après la relation (5),

$$\nu - \rho + \sigma + 1 \geqq 2;$$

ce nombre $\nu - \rho + \sigma + 1$ représente le nombre des constantes arbitraires dont dépend la fonction rationnelle $\Pi(x, y)$ la plus générale devenant infinie du premier ordre aux ν points (α_i, β_i) ou en quelques-uns de ces points seulement. Cette fonction ne peut se réduire à une constante, puisqu'elle dépend de deux paramètres arbitraires au moins. Donc il existe une fonction rationnelle du point analytique (x, y) ayant au plus ν pôles du premier ordre.

3. Le second lemme qui nous sera utile est le suivant: s'il existe une fonction rationnelle de (x, y) devenant infinie du premier ordre en n points seulement d'une courbe C, on peut trouver une courbe C' appartenant à la même classe que la courbe C et représentée par une équation du degré n par rapport à l'une des variables. Soit $\Pi(x, y)$ une fonction rationnelle ayant n pôles du premier ordre $(\alpha_1, \beta_1), \ldots . (\alpha_n, \beta_n)$; prenons une autre fonction rationnelle $\Pi_1(x, y)$ ayant un seul pôle du premier ordre commun avec $\Pi(x, y)$, le point (α_1, β_1) par exemple, et posons

$$X = \Pi(x, y), \quad Y = \Pi_1(x, y).$$

Lorsque le point (x, y) décrit la courbe C, le point (X, Y) décrit une courbe C', qui correspond point par point à la courbe C; en effet, au point (α_1, β_1) de C correspond un point à l'infini de C', avec une direction asymptotique non parallèle aux axes. Inversement, à ce point à l'infini de C' correspond un seul point de C, le point (α_1, β_1). A une valeur de X, l'équation $X = \Pi(x, y)$ fait correspondre n points (x, y) de la courbe C et, par suite, n valeurs de Y; l'équation qui représente la courbe C' est donc de degré n par rapport à Y.

4. Il est facile maintenant d'établir la proposition énoncée plus haut. Supposons que les coordonnées x, y d'un point de la courbe C, représentée par l'équation (1), soient des fonctions rationnelles de t et de v,

$$x = \phi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \tag{6}$$

v et t étant liées par la relation algébrique

$$\Phi(t, v) = 0, \tag{7}$$

de degré n en v. A une valeur arbitraire Θ de t correspondant n valeurs de v, en général distinctes, $v_1, v_2, \ldots . v_n$ et par suite n points $(x_1, y_1), \ldots . (x_n, y_n)$ de la courbe C. Considérons d'abord le cas où ces n points sont distincts. La fonction rationnelle $\frac{1}{t - \Theta}$ du point analytique (t, v) devient infinie du premier ordre en n points seulement de la courbe auxiliaire C, représentée par l'équation (7), à savoir, aux points $(\Theta, v_1), (\Theta, v_2), \ldots . (\Theta, v_n)$. Donc, d'après le premier lemme qui a été démontré, il existe une fonction rationnelle $\Pi(x, y)$, qui est infinie du premier ordre aux n points $(x_1, y_1), \ldots . (x_n, y_n)$, ou en quelques-uns de ces points seulement. D'après le second lemme, on peut trouver une courbe C' correspondant point par point à la courbe C, et représentée par une équation qui sera de degré n au plus par rapport à l'une des variables.

Si les n points (x, y) de C qui correspondent à une valeur arbitraire de t ne sont pas distincts, le raisonnement n'est plus applicable. Mais, dans ce cas, les coordonnées d'un point (x, y) correspondant à une valeur arbitraire de t s'obtiendront par la résolution d'une équation de degré inférieur à n, quand on l'aura ramenée à n'avoir que des racines simples. Autrement dit, x et y seront des fonctions rationnelles de t et d'une variable auxiliaire W liée à t par une équation algébrique de degré inférieur à n par rapport à W.

5. Étant donnée une courbe C, de genre ρ, appelons *ordre* d'une fonction rationnelle du point analytique (x, y) la somme des ordres des pôles de cette fonction rationnelle, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité. Cet ordre ne peut pas descendre au dessous d'une certaine limite r; il est clair que ce nombre r est un invariant relativement à toute transformation birationnelle. Parmi toutes les courbes de la même classe que C, il y en a toujours qui sont représentées par une équation renfermant l'une des variables au degré r seulement, mais il ne peut y en avoir renfermant l'une des variables à un degré inférieur à r. Pour $\rho = 0$, on a $r = 1$; si $\rho = 1$, ou $\rho = 2$, on a $r = 2$; si $\rho = 3$, r peut-être égal à 2 ou à 3; enfin, si $\rho > 3$, r est au plus égal à $\rho - 1$. Les courbes pour lesquelles $r = 2$ sont dites courbes *hyperelliptiques*; on peut leur faire correspondre point par point une courbe ayant une équation de la forme

$$y^2 = P(x), \tag{8}$$

$P(x)$ étant un polynôme.

Du théorème démontré plus haut, on conclut immédiatement que *si une courbe C est une transformée simplement rationnelle d'une autre courbe C', le nombre r relatif à la courbe C est au plus égal au nombre r' relatif à la courbe C'.* Par exemple, si la courbe C' est une courbe hyperelliptique, on a $r' = 2$, et, par suite, $r = 1$ ou $r = 2$. Donc la courbe C est elle-même hyperelliptique, à moins d'être une courbe unicursale. Il peut se faire que l'on ait $r = r'$, sans que la transformation soit birationnelle; par exemple, supposons que dans la relation (8) le polynôme $P(x)$ soit de degré $2\rho + 2$,

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2\rho+2}),$$

et que les $2\rho + 2$ racines a_i soient distinctes, aucune d'elles n'étant nulle. Si on pose $x = x'^2$, on est conduit à une nouvelle relation hyperelliptique

$$y^2 = Q(x'),$$

le polynôme $Q(x')$ étant de degré $4\rho + 4$. On a ici $\rho' = 2\rho + 1$, $r' = r$.

Si la transformation par laquelle on passe de la courbe C' à la courbe C est de degré μ, c'est-à-dire si elle fait correspondre à un point de C μ points de C', on a $r' \leqq r\mu$. En effet, une fonction rationnelle de (x, y) devenant infinie du premier ordre en r points de C se change en une fonction rationnelle de (x', y') devenant infinie du premier ordre en $r\mu$ points de C'.

6. Voici une autre remarque sur les transformations simplement rationnelles des courbes algébriques. Soit C une courbe de degré m et de genre ρ, C' une courbe de degré m' et de genre ρ', μ le degré de la transformation simplement rationnelle par laquelle on passe de C' à C; nous supposons $\rho \geqq 2$. Soient $Q_1(x, y)$, $Q_2(x, y)$ deux polynômes adjoints distincts de degré $m - 3$ relatifs à la courbe C. Puisque toute intégrale de première espèce se change en une intégrale de première espèce, on a

$$\int \frac{Q_1(x, y)\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \int \frac{R_1(x', y')\,dx'}{\frac{\partial F_1}{\partial y'}},$$

$$\int \frac{Q_2(x, y)\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \int \frac{R_2(x', y')\,dx'}{\frac{\partial F_1}{dy'}},$$

$R(x', y')$ et $R_2(x', y')$ étant deux polynômes adjoints d'ordre $m' - 3$ de la courbe C', et, par conséquent,

$$\frac{Q_1(x, y)}{Q_2(x, y)} = \frac{R_1(x', y')}{R_2(x', y')}.$$

La courbe adjointe $Q_1(x, y) - \varkappa Q_2(x, y) = 0$ rencontre la courbe C en $2\rho - 2$ points distincts des points doubles; à ces $2\rho - 2$ points correspondent $\mu(2\rho - 2)$ points de la courbe C' situés sur la courbe adjointe $R_1(x', y') - \varkappa R_2(x', y') = 0$. On conclut de là quelquefois que l'on a $\mu(2\rho - 2) = 2\rho' - 2$, mais la conclusion est inexacte; tout ce qu'on peut en déduire, c'est que l'on a

$$\mu(2\rho - 2) \leqq 2\rho' - 2,$$

ou

$$\mu(\rho - 1) \leqq \rho' - 1. \tag{9}$$

L'inégalité (9) fournit une limite inférieure pour ρ', quand ρ et μ sont donnés, mais cette limite inférieure n'est pas toujours atteinte. Par exemple dans la relation

$$y^2 = A(x - a_1)(x - a_2) \ldots . (x - a_8),$$

où toutes les quantités a_i sont distinctes et différentes de zéro, posons $x = x'^2$; il vient la nouvelle relation

$$y^2 = A(x'^2 - a_1) \ldots . (x'^2 - a_8).$$

On a ici $\rho = 3$, $\mu = 2$, $\rho' = 7$, et par suite $\rho' - 1 > 2(\rho - 1)$. Au contraire, dans la relation

$$y^2 = Ax(x - a_1) \ldots . (x - a_4),$$

faisons $x = x'^2$, il vient

$$y^2 = Ax'^2(x'^2 - a_1) \ldots . (x'^2 - a_4);$$

on a $\rho = 2$, $\mu = 2$, $\rho' = 3$, et, par conséquent, $\rho' - 1 = \mu(\rho - 1)$.

D'une manière générale, connaissant les nombres ρ et μ, il est impossible d'assigner *a priori* une limite supérieure pour le genre ρ' de la seconde courbe. Soit, en effet, une surface de Riemann composée de m feuillets, de genre ρ, n'ayant que des points de ramification simples, dont le nombre N est fourni par la formule générale de Riemann

$$N = m - 1 + \rho;$$

à cette surface T correspond une classe de courbes algébriques. Soit

$$F(x, y) = 0,$$

l'équation de l'une de ces courbes de degré m en y; la surface de Riemann correspondante à la fonction algébrique y de la variable x, définie par l'équation

précédente, est précisément la surface T. Nous supposerons que cette surface n'a aucun point de ramification à l'infini, ni au point $x' = 0$. Si on pose $x = x'^{\mu}$, on est conduit à une nouvelle relation

$$F(x'^{\mu}, y) = 0$$

de degré m en y, qui sera évidemment indécomposable, si la surface T n'a pas été prise d'une façon particulière. La surface de Riemann T', associée à cette nouvelle relation, se compose encore de m feuillets, et il est aisé de voir qu'elle possède μN points de ramification simples. On a donc

$$\rho' = \mu N - (m-1) = \mu\rho + (\mu - 1)(m-1);$$

or, les nombres ρ et μ étant donnés, il n'y a pas de limite supérieure pour m, ni par suite pour ρ'.

PARIS, *le* 11 *Mai* 1894.